2022-06-03 Quarto Compitino Analisi 2

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**claudio.saccon@unipi.it**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

Istruzioni di compilazione: Si usi:
- lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;
- il carattere `^` per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;
- le combinazioni >= per il maggiore o eguale $\geq$ e <= per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;
- il carattere _ per indicare l'indice: `a_n` per a_n;
- `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;
- `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;
- `Pi` per π;
- le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;
- le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;
- per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 15 minuti)

Cognome

claudio

Nome

saccon

Matricola

123456

Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Esercizio Uno

Si considerino il dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ e il campo $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$ definiti da:

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, y^2 + z^2 \geq 9\}$$
$$\vec{f}(x,y,z) := \frac{x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}}{y^2 + z^2}$$

Si considerino inoltre i tre sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ definiti da:

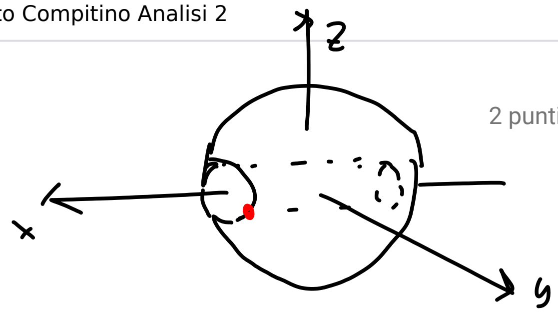
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -4 < x < 4, x^2 + y^2 + z^2 = 25\}$$
$$L := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -4 < x < 4, y^2 + z^2 = 9\}$$
$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \pm 4, y^2 + z^2 = 9\}$$

Diamo per buono che $\partial D = S \cup L \cup C$. Indichiamo inoltre con $\hat{\nu}(P)$ la normale unitaria uscente da D, definita per $P \in \partial_{reg} D$ (frontiera regolare di D).

1 punto

1. Si quale delle seguenti espressioni corrisponde alla frontiera regolare di D
   (a) $S \cup C$
   (b) $L \cup C$
   (c) $S \cup L$
   (d) $S \cup L \cup C$
   (e) nessuna delle precedenti

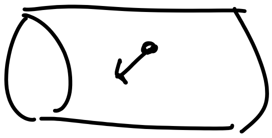
- ( ) (a)
- ( ) (b)
- (•) (c)
- ( ) (d)
- ( ) (e)



2 punti

2. Si scriva $\hat{\nu}(4,3,0)$ oppure si scriva "non esiste".

non esiste



2 punti

3. Si scriva $\hat{\nu}(1,\sqrt{5},-2)$ oppure si scriva "non esiste".

(0,-sqrt(5)/3,2/3)

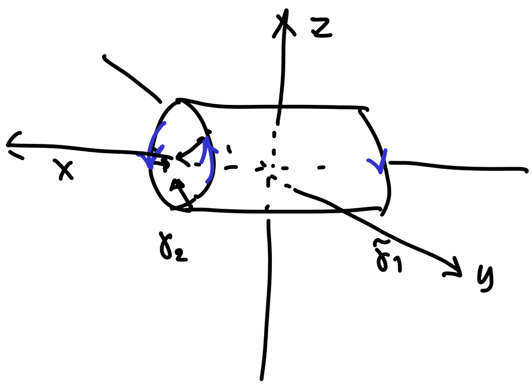
2 punti

4. Date le due curve (chiuse) $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definite da

$$\gamma_1(t) := -4\vec{\mathbf{i}} + 3\cos(t)\vec{\mathbf{j}} + 3\sin(t)\vec{\mathbf{k}} \qquad , \qquad \gamma_2(t) := 4\vec{\mathbf{i}} + 3\cos(t)\vec{\mathbf{j}} + 3\sin(t)\vec{\mathbf{k}}$$

si dica quale tra le seguenti coppia di curve descrive $\Sigma(\bar{L})$ coerentemente con $\hat{\nu}$ (ricordiamo che se γ è una curva $\tilde{\gamma}$ indica la curva γ percorsa in verso opposto).

(a) γ_1 e γ_2;
(b) $\tilde{\gamma}_1$ e γ_2;
(c) γ_1 e $\tilde{\gamma}_2$;
(d) $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$;
(e) nessuna delle precedenti.



- ( ) (a)
- (•) (b)
- ( ) (c)
- ( ) (d)
- ( ) (e)

1 punto

5. Si dica se $\vec{f}$ è irrotazionale.

- ○ Sì
- ◉ No

per es. $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(y^2+x^2)^2}$

$\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 0$

sono diverse

1 punto

6. Si dica se $\vec{f}$ è solenoidale.

- ○ Sì
- ◉ No

7 punti

0

7. Si calcoli il flusso

$$\Phi(\vec{f}, L, \hat{\nu}) = \iint_L \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma$$

-16Pi

6 punti

8. Si calcoli il flusso

$$\Phi(\mathrm{rot}\vec{f}, L, \hat{\nu}) = \iint_L \mathrm{rot}\vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma$$

0

Esercizio Due

(7) Si può parametrizzare L considerando

$$\Gamma(x,\theta) = (x, 3\cos\theta, 3\sin\theta) \qquad -4 \le x \le 4 \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Gamma}{\partial x} = \vec{i} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial\theta} = -3\sin\theta\,\vec{j} + 3\cos\theta\,\vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{N}(x,\theta) = \frac{\partial\Gamma}{\partial x} \otimes \frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} = -3\sin\theta\,\vec{k} - 3\cos\theta\,\vec{j} \qquad (\vec{i}\otimes\vec{j} = \vec{k},\ \vec{i}\otimes\vec{k} = -\vec{j})$$

DUNQUE $\displaystyle\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = -3\iint_{\substack{-4\le x\le 4\\ 0\le\theta\le 2\pi}} \vec{f}(x, 3\cos\theta, 3\sin\theta)\cdot(\cos\theta\,\vec{j} + \sin\theta\,\vec{k})\,dx\,d\theta =$

$$-3\int_{-4}^{4}\left(\int_0^{2\pi} \frac{(x\vec{i} + 3\cos\theta\,\vec{j} + 3\sin\theta\,\vec{k})}{9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta}\cdot(\cos\theta\,\vec{j} + \sin\theta\,\vec{k})\,d\theta\right)dx =$$

$$-9\int_{-4}^{4}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{9}\,d\theta\right)dx = -\int_{-4}^{4} 2\pi\,dx = -16\pi$$

(8) Si può fare in due modi

(a) Mediante STOKES: $\displaystyle\iint_L \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \int_{\gamma_1}\vec{f}\cdot d\vec{s} - \int_{\gamma_2}\vec{f}\cdot ds$

(vedi i versi di cui alla domanda 4). Allora

$$\int_{\gamma_2}\vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} f(4, 3\cos\theta, 3\sin\theta)\cdot(0, -3\sin\theta, 3\cos\theta) =$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{(4\vec{i} + 3\cos\theta\,\vec{j} + 3\sin\theta\,\vec{k})}{9}\cdot(-3\sin\theta\,\vec{j} + 3\cos\theta\,\vec{k})\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{-9\cos\theta\sin\theta + 9\sin\theta\cos\theta}{9}\,d\theta = \int_0^{2\pi} 0\,d\theta = 0$$

L'altro integrale è analogo

(b) Calcolando $\operatorname{rot}\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & D_x & x/(y^2+z^2) \\ \vec{j} & D_y & y/(y^2+z^2) \\ \vec{k} & D_z & z/(y^2+z^2) \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\left(\frac{z(-2y)}{(y^2+z^2)^2} - \frac{y(-2z)}{(y^2+z^2)^2}\right) - \vec{j}\,\frac{x(-2z)}{(y^2+z^2)^2} + \vec{k}\,\frac{x(-2y)}{(y^2+z^2)^2} =$

$$\frac{2x}{(y^2+z^2)^2}\left(0\,\vec{i} - z\,\vec{j} + y\,\vec{k}\right)$$

A questo punto uso la parametrizzazione del punto (7) e calcolo l'integrale

$$\iint_L \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{\substack{-4\le x\le 4\\ 0\le\theta\le 2\pi}} \frac{(-3\sin\theta\,\vec{j} + 3\cos(\theta)\,\vec{k})}{81}(3\cos\theta\,\vec{j} + 3\sin\theta\,\vec{k})\,dx\,d\theta =$$

$$\iint_{\substack{-4\le x\le 4\\ 0\le\theta\le 2\pi}}\frac{-9\sin\theta\cos\theta + 9\cos\theta\sin\theta}{81}\,dx\,d\theta = 0$$

. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = 2x - z - 4t \\ y' = -x - 2y + 7z - 5t \\ z' = x - 3t \end{cases} \tag{Sys}$$

che è associato alla matrice costante A e al termine noto $B(t)$ dati da:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B(t) := \begin{bmatrix} -4t \\ -5t \\ -3t \end{bmatrix}.$$

3 punti

1. La matrice di Jordan di A ha:
   (A) un solo blocco di Jordan;
   (B) due blocchi di Jordan;
   (C) tre blocchi di Jordan;

- ( ) (A)
- (x) (B)
- ( ) (C)

perché ci sono due autovalori $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -2$
con $m_A(\lambda_2) = 1$ $(= m_G(\lambda_2))$
e $\mathrm{Ker}(A-\lambda_1)$ ha dimensione 1
cioè $m_G(\lambda_1) = 1$ ($1+1 = 2 =$ numero blocchi)

6 punti

2. Si trovi una soluzione di (Sys) della forma:

$$x(t) = a\,t + b, \quad y(t) = c\,t + d, \quad z(t) = e\,t + f$$

con a, b, c, e, f, g da determinare in $\mathbb{R}$ (eventualmente si risponda "non esiste").

x(t)=2+3t
y(t)=1+3t
z(t)=1+2t

- Polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -2-\lambda & 7 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda+2) \quad -\lambda(\lambda-2)(\lambda+2) =$$

$$-(\lambda+2)\Big(1+\lambda(\lambda-2)\Big) =$$

$$= -(\lambda+2)(1+\lambda^2-2\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

due autovalori: $\lambda_1 = 1 \quad m_A = 2 \qquad \lambda_2 = -2 \quad m_A = 1$

- se $\lambda = \lambda_1 =$ prendo $B = A - I$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (\text{rango } 2 \to \dim \operatorname{Ker} = 1)$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & -27 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Cerco $e_2 \in \operatorname{Ker} B^2$ $e_2 \notin \operatorname{Ker} B$. Se $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

allora $B^2 e_2 = 0 \iff 9x + 9y - 27z = 0 \iff x + y = 3z$

Allora $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x+y}{3} \end{pmatrix}$ se prendo $x = 2$ $y = 1$ trovo $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

che mi dà $e_2 = B e_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$

- Se $\lambda = \lambda_2 = -2$ prendo $B = B + 2I$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \leftarrow \text{ vedo che } e_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} B$$

- Da quanto sopra ho che posto

$$M = [e_1 | e_2 | e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

si ha $A = M J M^{-1}$

- IN particolare J ha <u>due</u> blocchi di Jordan

- Se $Y = \begin{bmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ e \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} b \\ d \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$Y' - AY = \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} t =$$

$$\begin{bmatrix} a \\ c \\ e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2b - f \\ -b - 2d + 7f \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a - e \\ -a - 2c + 7e \\ a \end{bmatrix} t$$

Se voglio che venga $\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} t$ deve essere

$$\begin{cases} a = 2b - f \\ c = -b - 2d + 7f \\ e = b \end{cases} \quad \text{E} \quad \begin{cases} 2a - e = 4 \\ -a - 2c + 7e = 5 \\ a = 3 \end{cases} \iff \begin{matrix} a = 3 & e = 2 & c = 3 \\ b = 2 & f = 1 & d = 1 \end{matrix}$$

cioè $\overline{Y}(t) = \begin{bmatrix} 3t + 2 \\ 3t + 1 \\ 2t + 1 \end{bmatrix}$

- Cerco la sol. con dato $Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; la cerco della forma

$Y = Y_0 + \overline{Y}$. Allora in $t=0$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Y_0(0) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dunque

sol. dell'omogenea

$Y_0(0) = -\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad (= -e_2 \; !!)$

Dalla formula

$$Y(t) = e^{tA} Y(0) = -e^{tA} e_2 = -M e^{tJ} M^{-1} e_2$$

Dato che $e_2 = M\hat{e}_2$ si ha $M^{-1} e_2 = \hat{e}_2 \Rightarrow$

$$Y(t) = -M e^{tJ} \hat{e}_2 = -M \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$- \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^t \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix} = -e^t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -e^t \begin{bmatrix} t + 2 \\ 2t + 1 \\ t + 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y(t) = \begin{bmatrix} 3t + 2 - (t+2)e^t \\ 3t + 1 - (2t+1)e^t \\ 2t + 1 - (t+1)e^t \end{bmatrix}$$

9 punti

3. Si trovi LA soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante la condizione iniziale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.
Suggerimento : Si cerchi Y della forma $Y = Y_0 + \bar{Y}$ con Y_0 soluzione del sistema omogeneo.

x(t)=2+3t-(t+2)exp(t)
y(t)=1+3t-(2t+1)exp(t)
z(t)=1+2t-(t+1)exp(t)